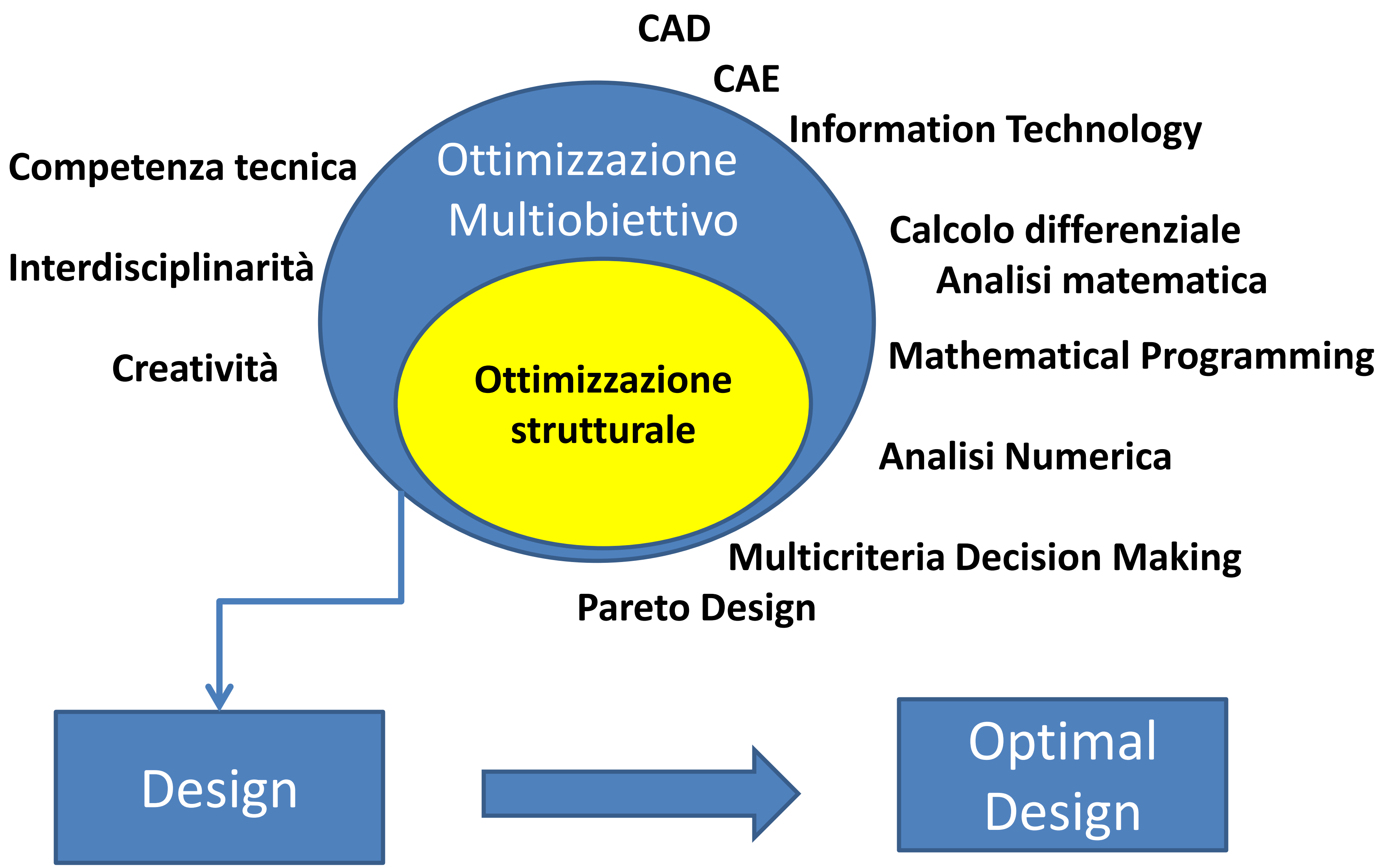
OTTIMIZZAZIONE TOPOLOGICA

Indice argomenti

- L’ottimizzazione nel progetto
- L’ottimizzazione strutturale: dimensioni, forma, topologia
- Ottimizzazione topologica del continuo e dei reticoli
- Schemi di soluzione
- L’approccio microgeometrico: limiti, varianti
  - l’omogenizzazione
  - Il filtraggio
  - tipologie ed esempi
- L’approccio macrogeometrico: limiti, varianti

Perché Ottimizzazione

- Quantifcare gli obiettivi
- Evitare i loop di controllo e verifica…è noioso, fa perdere tempo
- Esplorare soluzioni innovative
- Considerare un elevato numero di variabili e vincoli
- Gestire obiettivi in conflitto


CAD
CAE
Information Technology
Competenza tecnica
Ottimizzazione
Multiobiettivo
Calcolo differenziale
Analisi matematica
Interdisciplinarità
Creatività
Ottimizzazione
strutturale
Mathematical Programming
Analisi Numerica
Multicriteria Decision Making
Pareto Design
Design
Optimal
Design

Progettare è ottimizzare

Topologia Forma Dimensioni

- Ottimizzazione strutturale
- *Generalized* shape optimization
- Lay-out design → coinvolge le tre voci e procede anche per contrapposizioni: innovazione vs stato del'arte vs vincoli di fabbricazione

Ottimizzazione Topologica

L'OTTIMIZZAZIONE STRUTTURALE

Le variabili di un progetto strutturale

[Schmidt 1960]:

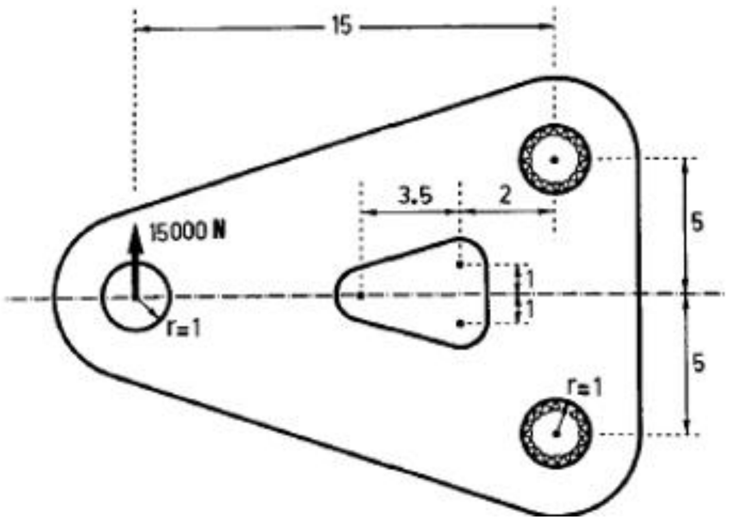
- Dimensioni
- Materiali
- Forma/geometria della struttura
- Topologia

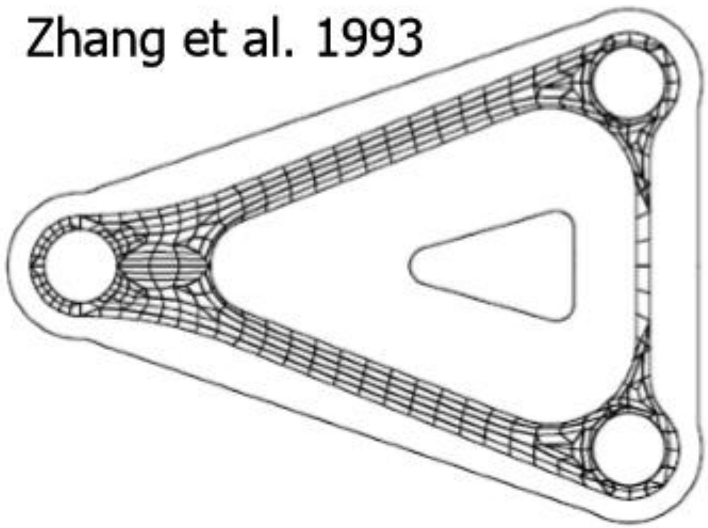
[Bendsoe 1996]:

- Dimensioni, Materiali → DIMENSIONAMENTO
- Forma/geometria della struttura
- Topologia

Topologia vs forma

Ottimizzazioni basate sui parametri di dimensione
NON
sono ottimizzazione topologica



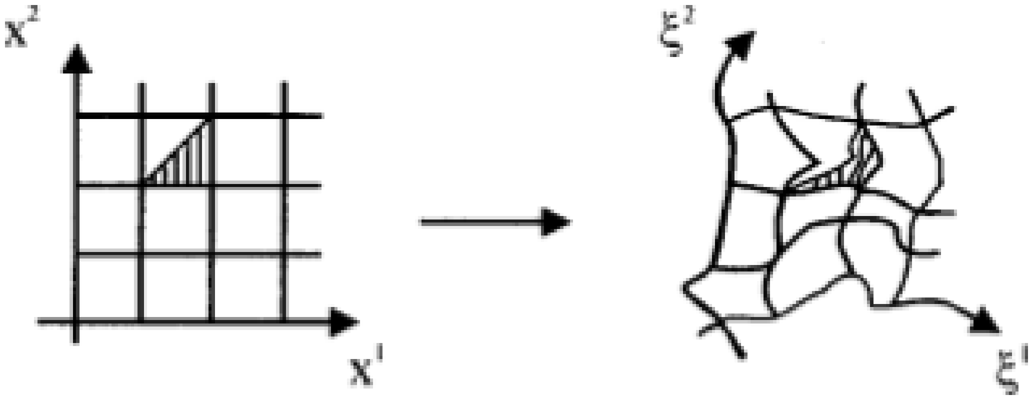


Ottimizzazione topologica significa definizione delle connessioni pieno/vuoto che formano la struttura

Topologia vs forma

<u>Topologia:</u> studio delle proprietà geometriche delle figure che non dipendono dalla nozione di misura.

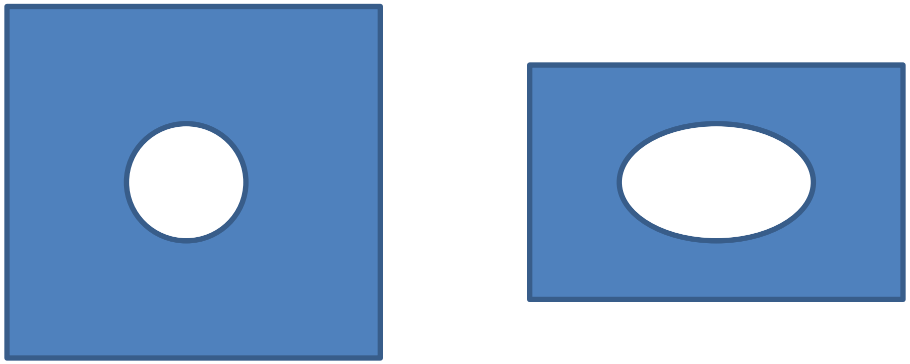
Tali proprietà sono degli invarianti nei confronti di deformazioni.



Due topologie sono uguali se esiste una trasformazione che consente di passare da un dominio all'altro senza creare o distruggere nuove relazioni di vicinanza.

Topologia vs forma

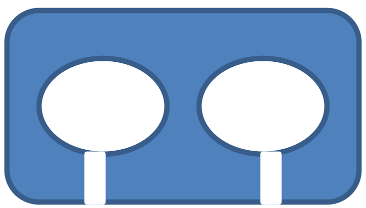
Cerchio ed ellisse hanno la stessa topologia pur avendo forme diverse.



Forma: geometria parametrica individuata da posizioni e misure.

Topologia: esempi

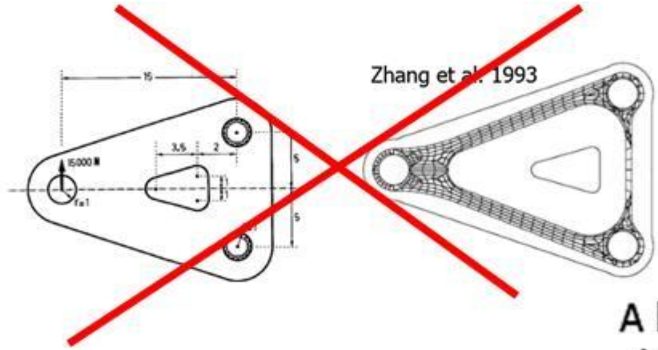
Spazi semplicemente, bi e tri connessi



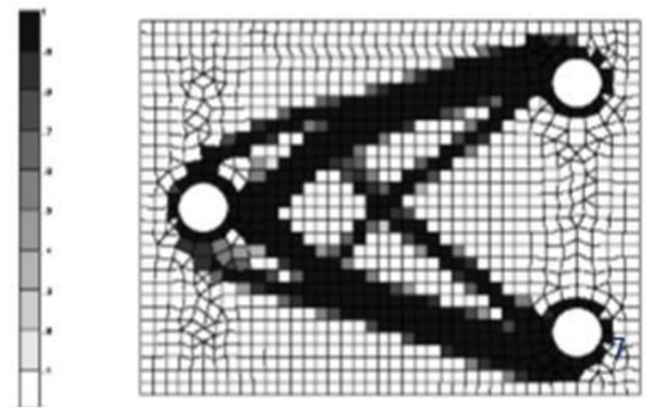
Riduzione di un dominio topologico

Deformazioni e **riduzione**

Ottimizzazione di topologia



A better morphology by topology optimization (Duysinx, 1996)



- L'ottimizzazione topologica ricerca la distribuzione ottimale del materiale in uno spazio di progetto vincolato.
- I vincoli possono essere:
  - geometrici/funzionali
  - condizioni di resistenza
  - condizioni di rigidezza
  - condizioni sulle frequenze proprie

Ottimizzazione Topologica

OTTIMIZZAZIONE TOPOLOGICA DEL CONTINUO: BASI

Concetti generali

Due famiglie di ottimizzazione topologica:

per il continuo e per le strutture reticolari

Per essere affidabili questi metodi devono:

- essere matematicamente ben posti e condizionati per avere l'unicità della soluzione
- Devono garantire la soluzione indipendentemente dalla:

  - mesh

  - dalle variazioni locali delle condizioni di carico

OT di strutture continue

Material or Microstructure Technique

Geometrical or Macrostructure Technique

La modifica della topologia è associata alla verifica della condizione di minimo volume, nel rispetto dei vicoli.

La discretizzazione del volume iniziale rappresenta il first guess con il massimo volume (dominio della topologia iniziale)

Le design variables sono associate alla densità di ciascun elemento, che può spegnersi in funzione del calcolo di ottimizzazione

Non serve una griglia distribuita di microelementi a densità variabile

La topologia cambia aggiungendo e sottraendo volumi

Con ottimizzazioni di forma successive si delinea la forma ottimale

FORMULAZIONE

L'impostazione piu semplice è cercare la minima cedevolezza (=massima rigidezza globale) con l'ipotesi di materiale isotropico, in campo lineare elastico

Siano
$\mathbf{u}$ = spostamento all'equilibrio
$\mathbf{v}$ = spostamento virtuale
$\mathcal{L}(\mathbf{u})$=Lavoro virtuale
$\mathcal{E}$=energia interna
E=caratteristiche di rigidezza

$$\left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{u} \in \mathbf{U},\, E} \mathcal{L}(\mathbf{u}) \\ \text{con: } \mathcal{E}_E(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}) \\ \text{per } \mathbf{u} \text{ e } \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{U},\ E_{el} \in E_{adm} \end{array} \right.$$

In campo discreto mediante FEA
K= matrice di rigidezza
con
$\mathbf{K} = \Sigma\, \mathbf{K}_{el}\,(E_{el}) \qquad el=1,num\_el$

$$\left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{u},\, E_{el}} \mathbf{f}^T\mathbf{u} \\ \text{con: } \mathbf{K}(E_{el})\mathbf{u} = \mathbf{f} \qquad \text{con } E_{el} \in E_{adm} \end{array} \right.$$

•Se Ω è il dominio investigato, l'ottimo è un suo sottoinsieme Ω^* in cui $K(E_{el})=0$

•Elementi che non contribuiscono favorevolmente alla condizione di ottimo sono elementi che devono essere spenti

•In questo modo $K(E_{el})$ si configura come una variabile discreta 0-1

Come trovare la condizione di ottimo?

Sol. 1

Material techniques: uso di variabili continue con l'uso di una penalizzazione in grado di renderle discrete

Sol. 2

Macrostructure techniques

Sol. 3

Methodi duali → non generalizzabili a tutte le configurazioni di vincoli

Simulated Annealing , Algoritmi genetici → Time comsuming

[Stolpe e Svanberg 2001]→ linear mixed continous-integer programming

Ottimizzazione Topologica

L'APPROCCIO MICROGEOMETRICO

SIMP

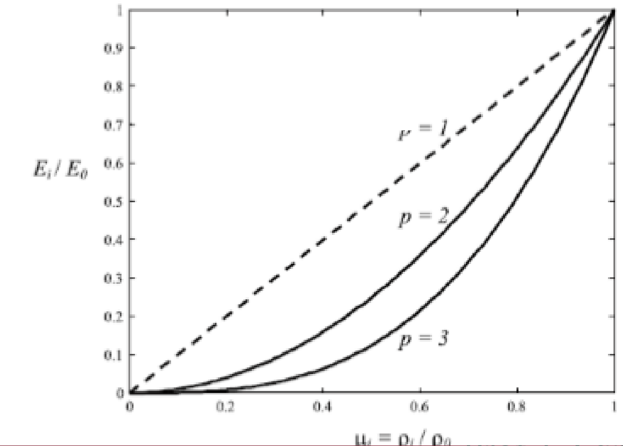
SIMP = Solid Isotropic Material with Penalization

$$F_{objfun} = \int_V \rho dV \rightarrow Minimum$$

La condizione di ottimo viene ricercata esprimendo la rigidezza dell'elemento discreto in funzione della densità $\rho \in [0, 1]$

La densità varia con continuità, lo spegnimento della rigidezza avviene attraverso l'esponente di penalizzazione, p:

$$K = \rho^p K(E_{el})$$



Esiste un significato fisico per questo ragionamento?
Ovvero: esiste un materiale che si comporta secondo SIMP?

Sì ad es. nei casi piani se:

$$\rho \geq \max[2/(1-\nu); 4/(1+\nu)]$$

Come si risolve numericamente il problema?

- Formulazione discreta del criterio di ottimo
- Loop di calcolo per SIMP
- Quale algoritmo per cercare l'ottimo? MMA (CONLIN)

Limiti del problema e loro soluzione

Il problema è "ben posto"?

Esiste una soluzione? E' unica? Cambia con continuità rispetto le condizioni iniziali?

Se è "ben posto" è anche "ben condizionato"?

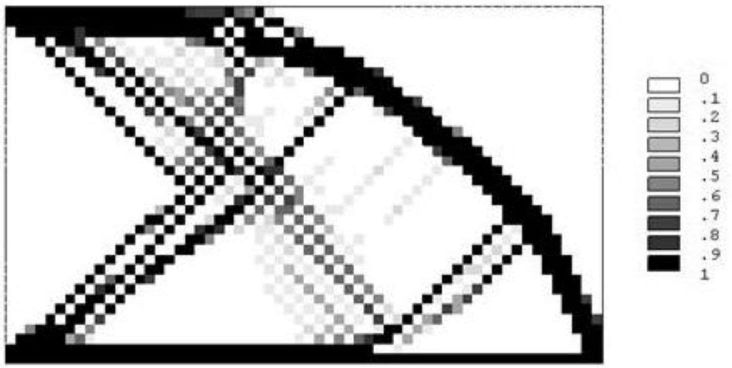
ovvero è stabile nei confronti della discretizzazione numerica necessaria alla sua soluzione?

- Il problema può non avere soluzione unica
- Si riscontrano dipendenze al variare locale dei carichi

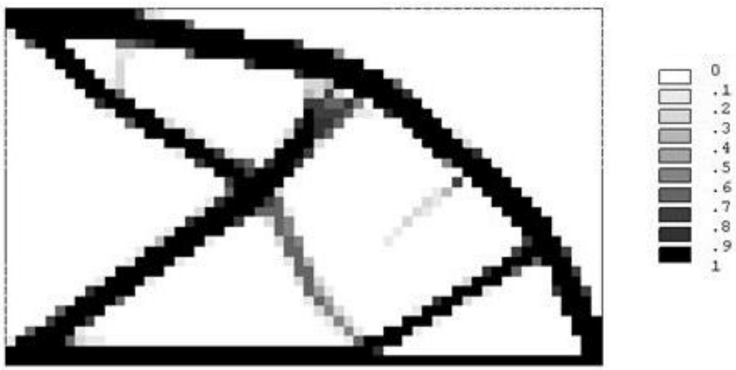
E' mesh dependent

Checkerboard problem

The checkerboard pattern in simply supported beam example [Sigmund and Petersson, 1998]



(a) The topology optimization result using four-node element



(b) The topology optimization result using eight-node element

Checkerboard pattern è dovuto ad instabilità numeriche introdotte dagli elementi finiti

Si risolve in vari modi

L'indipendenza dalla mesh allevia il problema, perché si trova una lunghezza minima di elemento
Non accade però l'inverso

Per garantire l'unicità della soluzione ho due strade:

1. Allargare il campo delle variabili → relaxation

$$\min\left\{c_r(x) : x \in X_r \subseteq R^n\right\}$$

$$X_r \supseteq X$$

$$c_r(x) \leq c(x) \qquad \forall x \in X$$

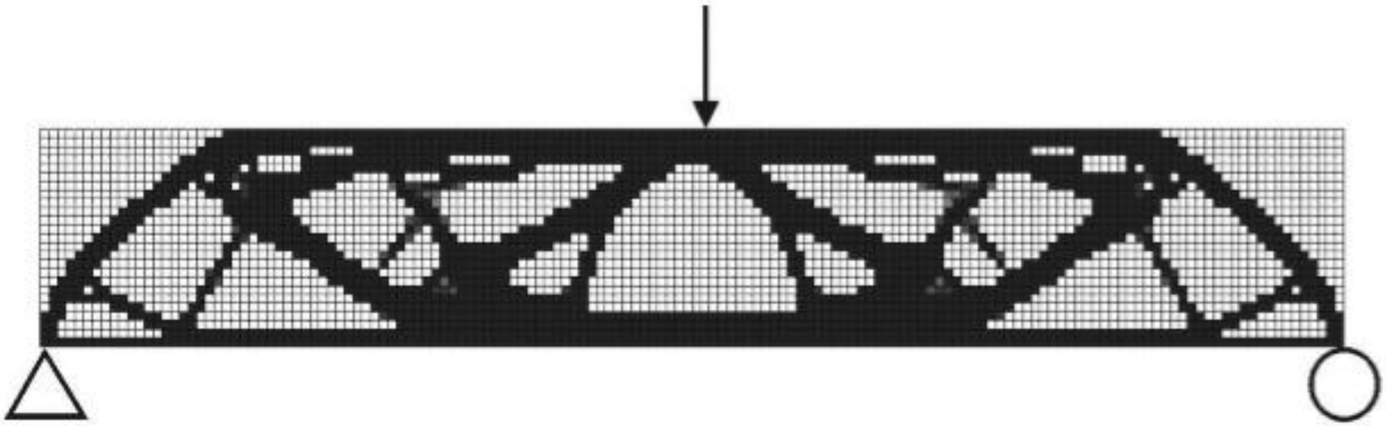
2. Restringere il campo delle soluzioni → filtering

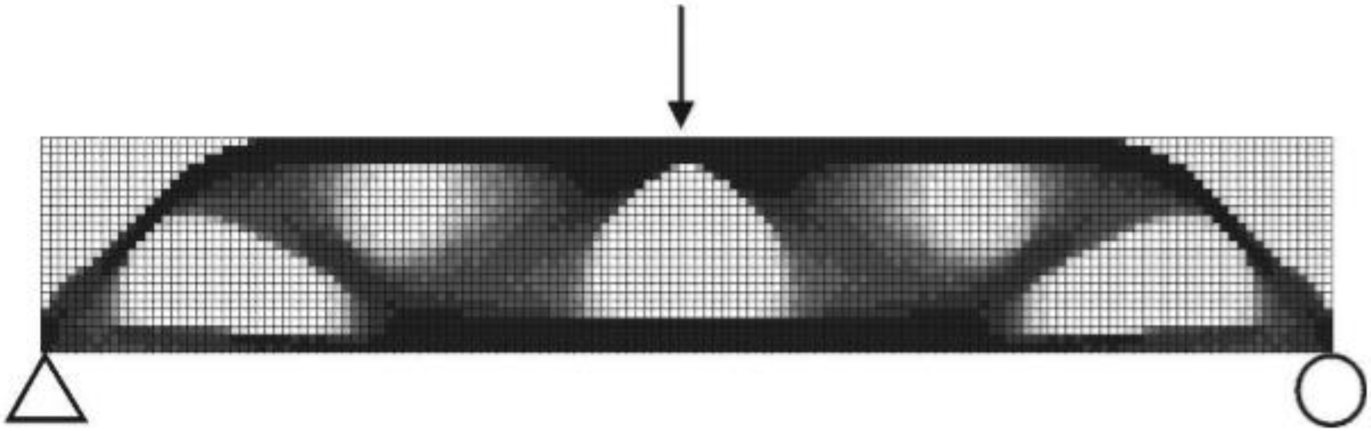
Filtering

- Perimeter method
- MOLE
- Ed altri

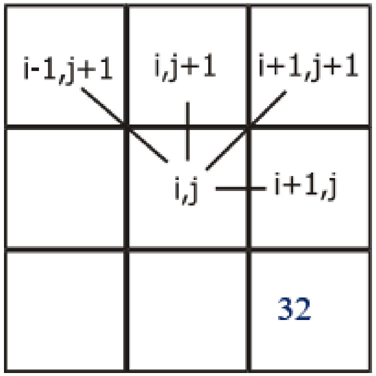
Attraverso dei filtri si escludono le soluzioni con oscillazioni pieno/vuoto non manifold

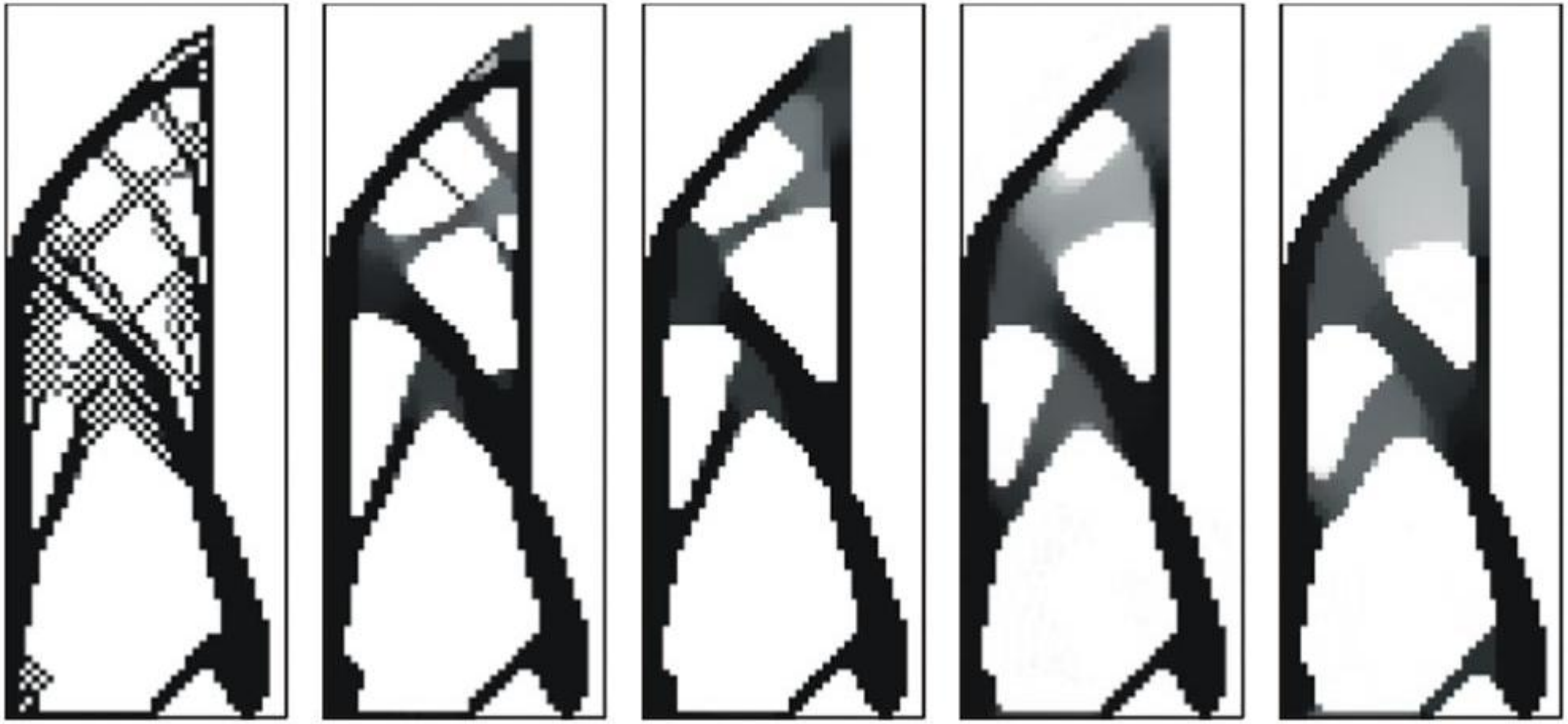
Il metodo di filtraggio sul perimetro pone un limite sul valore della lunghezza del bordo dei solidi → soluzioni checkerboard hanno 2P > di quelle stabili





$$P(\rho) = \mathrm{TV}_4 = \sum_{j=0}^{n_2}\sum_{i=1}^{n_1} h_2 \left|\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j}\right| + \sum_{j=1}^{n_2}\sum_{i=0}^{n_1} h_1 \left|\rho_{i,j} - \rho_{i,j-1}\right| +$$
$$\sum_{j=0}^{n_2-1}\sum_{i=0}^{n_1-1} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \left|\rho_{i,j} - \rho_{i+1,j+1}\right| +$$
$$\sum_{j=0}^{n_2-1}\sum_{i=0}^{n_1} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \left|\rho_{i,j} - \rho_{i-1,j+1}\right|$$





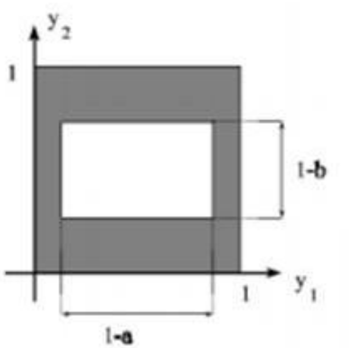
Unconstrained TV4 = 6.0 TV4 = 5.5 TV4 = 5.0 TV4 = 4.5

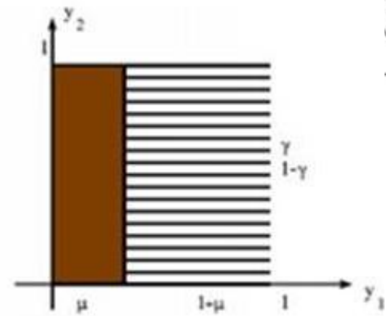
RELAXATION

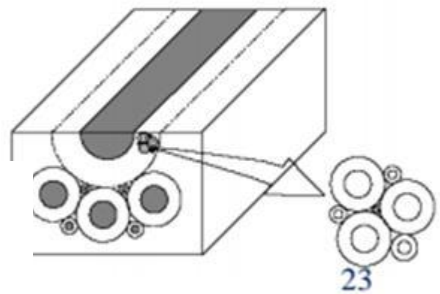
- La rigidezza di ogni elemento può essere descritta da “indipendenti” parametri geometrici che ne definiscono la densità
- La densità quindi può essere a sua volta descritta da altre variabili (estensione delle variabili = relaxation)

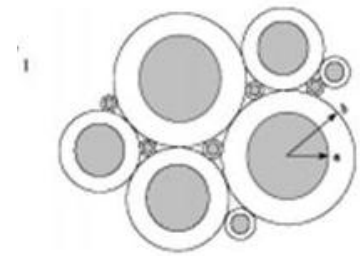
Attraverso la tecnica della Omogeneizzazione del comportamento strutturale microscopico riusciamo a descrivere il problema macroscopico in maniera ben posta e ben condizionata.

Esempi di celle = material laws

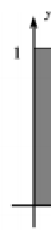








- Layered materials (rank-2 la
- Rectangular porosities
- Power law model (SIMP model)
- Hashin composite spheres
- Halpin-Tsai model
- Porous Uni-Directional (fibre reinforced) co



- ρ=1-μ_1(x)μ_2(x)
  Hole in cell
- Layered 2D microstructure a diversi ranghi

Esempi di Omogeneizzazione

- A livello microscopico la struttura è periodica
- La rigidezza è funzione di x e della periodicità δ

$$E' = E(x, x/\delta)$$

- In presenza di uno spostamento v(x):

$$v' = v(x, x/\delta) = v_0(x) + \delta v_1(x, x/\delta)$$

x/δ rappresenta la variabile spazio nella microstruttura

E viene derivata dal campo macroscopico e dal gradiente dei valori E in scala microscopica

Risolvo il prestrain in $y = x/\delta$ e poi aggiorno E(x)

Ottimizzazione Topologica

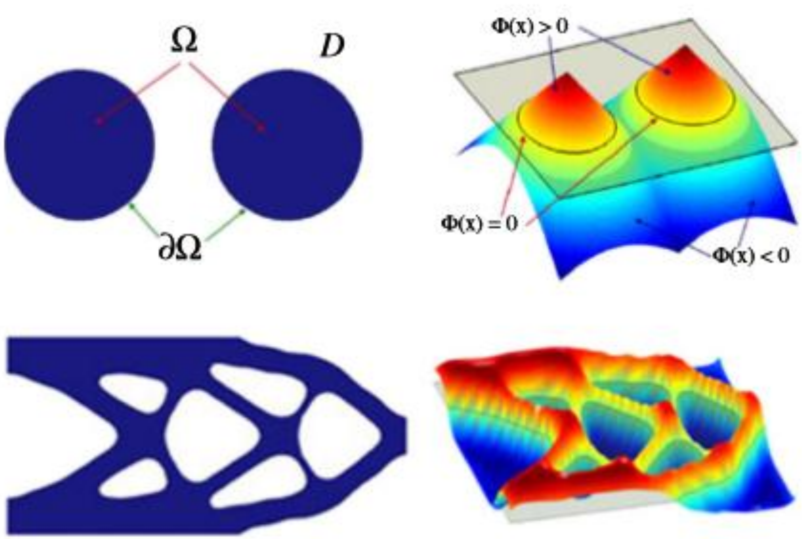
L'APPROCCIO MACROGEOMETRICO

Il Conventional Level set method [Wang 2003]

Si crea una griglia fissa di calcolo su cui valutare la relazione topologica. I bordi pieno/vuoto sono le curve per cui:

$$\Gamma=\{(x,y)\,|\,\varphi(x,y)=0\}$$

$$\partial\varphi/\partial t=v(x,y)//(\mathrm{grad}\varphi)//-wg(x,y)$$



Equazione Hamilton-Jacobi
$-w\bar{g}$ è il vettore velocità
ed è valutato in funzione dell’obiettivo dell’ottimizzazione e si trova tramite sensitivity analysis