Principi e Metodologie della Progettazione Meccanica

Corso del II anno della laurea magistrale
in ingegneria meccanica

ing. F. Campana

Modellazione di superfici: introduzione
Curve parametriche di Hermite e Bezier

MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
dalle curve di Bezier alle BSpline

Nelle curve di Bezier variando il poligono di controllo si modifica automaticamente l'intera curva. Quindi le curve di Bezier hanno carattere globale.

Il loro grado è sempre legato al numero di punti. Crescendo il numero di punti di controllo aumenta il rischio di maggiori oscillazioni (fenomeno di Runge).

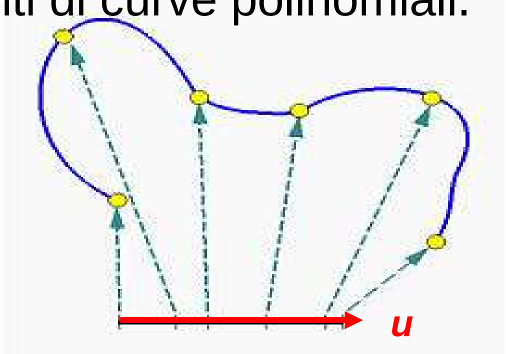
… Sarebbe preferibile una formulazione con il grado della curva indipendente dal numero dei punti adottati e che possa essere modificata localmente …

… dalle curve di Bezier si passa alle curve BSpline

Le BSpline sono curve composite ottenute congiungendo tra loro (con opportune condizioni di continuità) segmenti adiacenti di curve polinomiali.

Per fare ciò si suddivide l'intervallo di definizione del parametro *u* in sotto-intervalli

(i sotto-intervalli, spans, sono delimitati dagli elementi del *knot vector*)



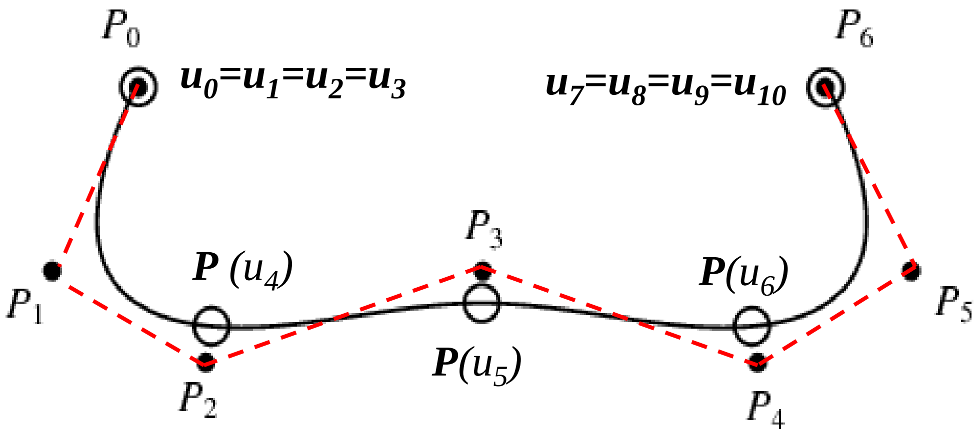
MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
curve BSpline

Nei knot span "prossimi" all'i-mo punto di controllo si attivano specifiche funzioni $N_{i,k}$ di grado prefissato k

$$\overrightarrow{P}(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)\overrightarrow{P_i}$$

I sottointervalli sono definiti da un vettore di nodi (*knots*) che risulta essere una <u>sequenza non decrescente</u> di $m+1$ valori.
Questi nodi definiscono i segmenti di curva che compongono la BSpline.
Il numero di nodi, m, dipende da n e da k : m=k+n+1

$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10})$



6+1 P_i $(n+1)$ 10+1 u_i $(m+1)$

Grado di Ni? $k=3=m-n-1$ $(k=10-6-1=3)$

Num. di archi che formano la curva?

$m-n=k+1=4$ *e sono:*

$\overset{\frown}{P0\ P(u4)}$ $\overset{\frown}{P(u4)\ P(u5)}$

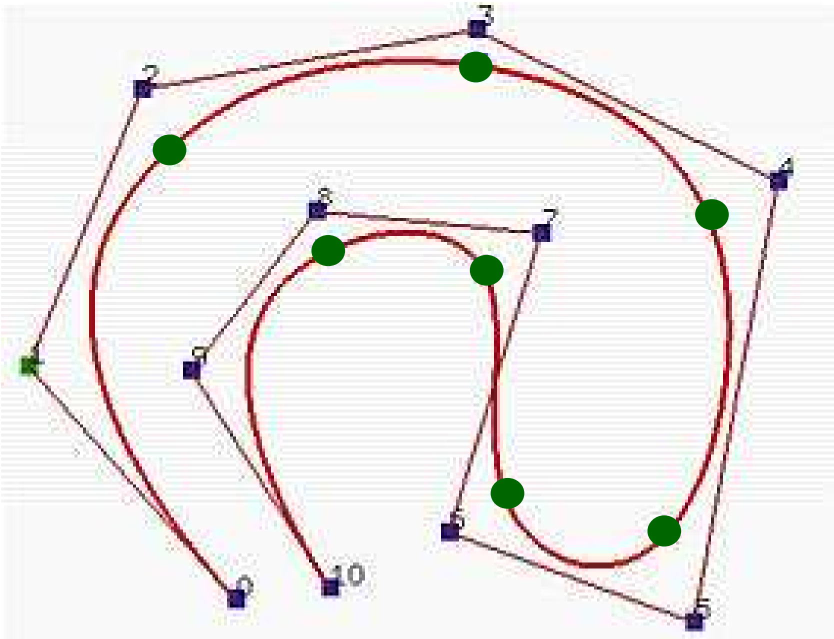
$\overset{\frown}{P(u5)\ P(u6)}$ $\overset{\frown}{P(u6)\ P6}$

Perché?

MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
curve B-Spline

Se si vuol far passare la curva per $\boldsymbol{P}_0$ e $\boldsymbol{P}_n$ fissato il grado k necessariamente i primi $k+1$ elementi del vettore nodi e gli ultimi $k+1$ sono rispettivamente in $u=0$ e $u=1$.

In questo caso la curva si dice non periodica, mentre knot span di ampiezza identica rendono la curva uniforme



$n=10 \qquad k=3$

$m=n+k+1=14$

$14+1$ knot

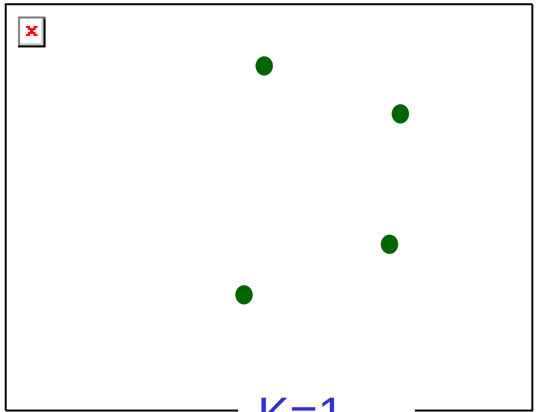
4 knot sono in 0 ed altri 4 sono in 10

7 nodi sono interni alla curva

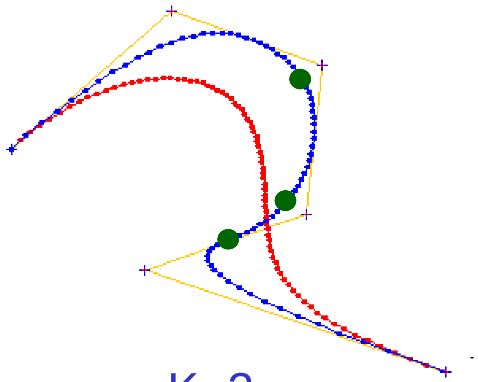
quindi 8 sono gli archi che formano la curva (e sono delimitati dai punti verdi)

MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
curve B-Spline

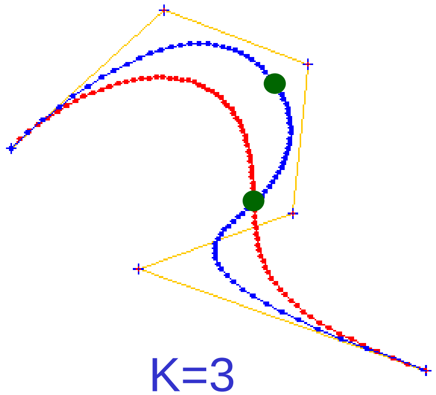
Confronto Bezier – Bspline per $n+1=6$



K=1



K=2



K=3

m=n+k+1=5+1+1=7

8 knot

4 sono agli estremi (2 x 2)

4 sono interni

5 segmenti = il poligono di controllo!

m=n+k+1=5+2+1=8

9 knot

6 sono agli estremi (3 x 2)

3 sono interni

4 segmenti

m=n+k+1=5+3+1=9

10 knot

8 sono agli estremi (4 x 2)

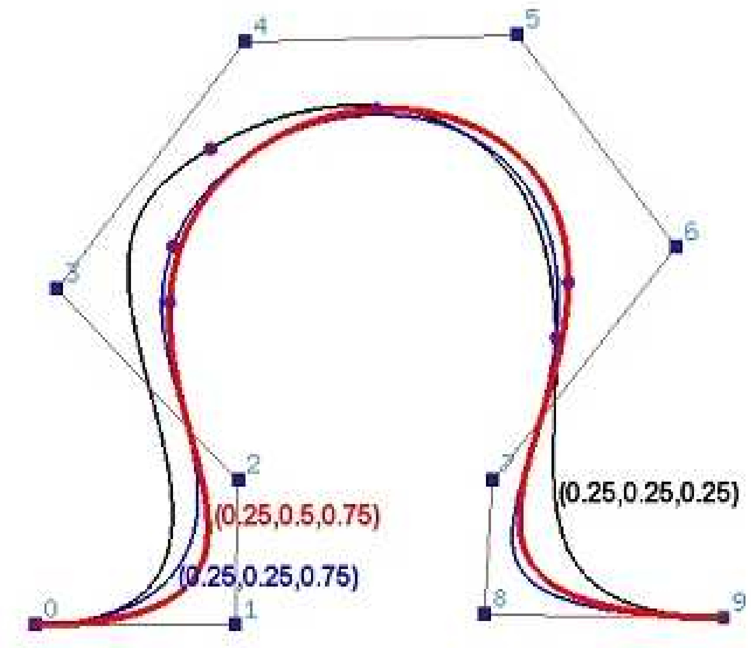
2 sono interni

3 segmenti

Diminuendo il grado la curva tende verso Il poligono di controllo.

MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
curve B-Spline

Mentre le variazioni di grado producono effetti “intuibili” cambiare la posizione dei nodi, ovvero l’ampiezza degli intervalli, non è un mezzo efficacie per controllare la forma!



10 punti di controllo

grado 6

m=n+k+1=9+6+1=16

17 nodi

Funzione non periodica → nodi interni 3

posizionati diversamente in base al colore:

[0.25, 0.5, 0.75] curva rossa

[0.25 0.25 0.75] curva blu

[0.25 0.25 0.25] curva nera

Dall’immagine emerge che non si riconosce un legame prevedibile tra variazione dei nodi interni e forma della curva.

N.B. i nodi possono coincidere tra loro anche all’interno dell’intervallo! Perché sono una <u>sequenza non decrescente</u>.

MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
curve B-Spline

Quale equazione analitica realizza tutto ciò?

$$\overrightarrow{P}(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)\overrightarrow{P_i}$$

La Base è definita da una formula ricorsiva

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u-u_i)N_{i,k-1}}{u_{i+k-1}-u_i} + \frac{(u_{i+k}-u)N_{i+1,k-1}}{u_{i+k}-u_{i+1}}$$

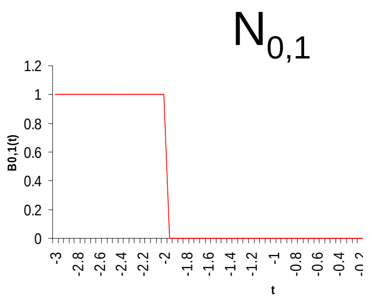
$$\begin{cases} N_{i,1}(u) = 1 & u \in [u_i, u_{i+1}] \\ N_{i,1}(u) = 0 & altrimenti \end{cases}$$

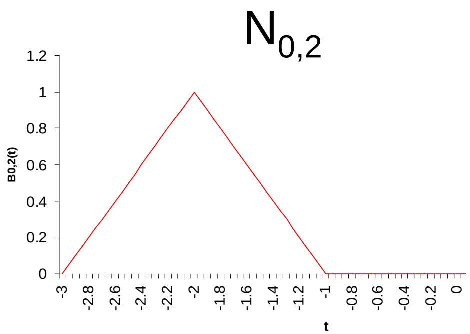
Fissato un valore i

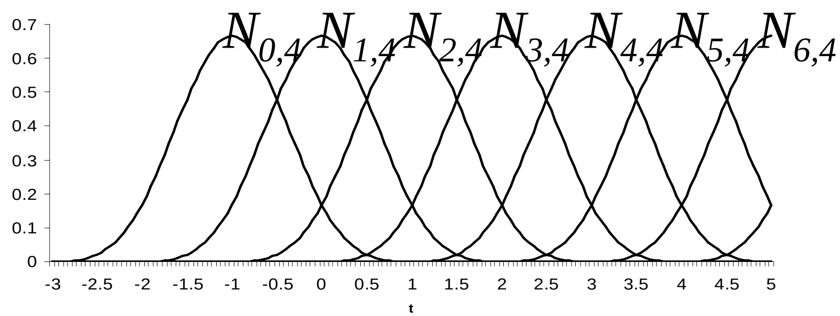
sono diverse da zero solo quelle nell'intervallo [ui, ui+k+1)

Ecco perché con k=1 si ottiene il poligono di controllo!

Esempi di basi al variare di k

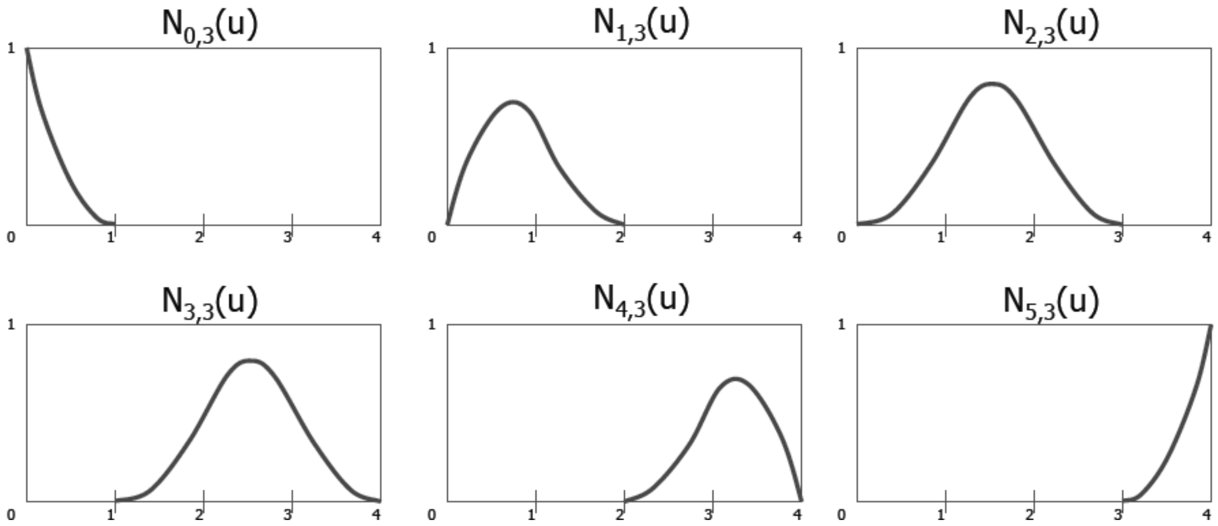






MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
curve B-Spline

La funzione di miscelamento per ciascun punto di controllo è quindi la somma delle basi attive nel punto u corrente



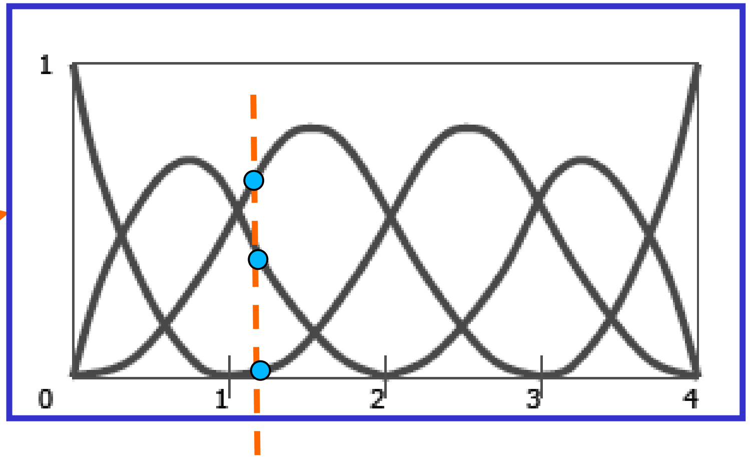
Andamenti delle basi per k=3, n+1=6

curva non periodica: $N_{0,3}$=1 in $u=0$ e $u=4$

Le blending function sono date dalla somma :

$$\overrightarrow{P}(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)\overrightarrow{P_i}$$

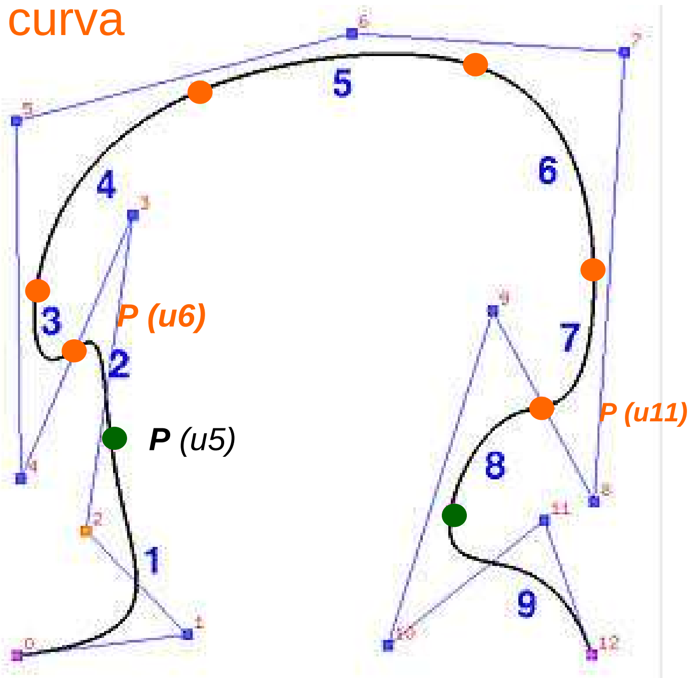
in funzione di dove si trova u

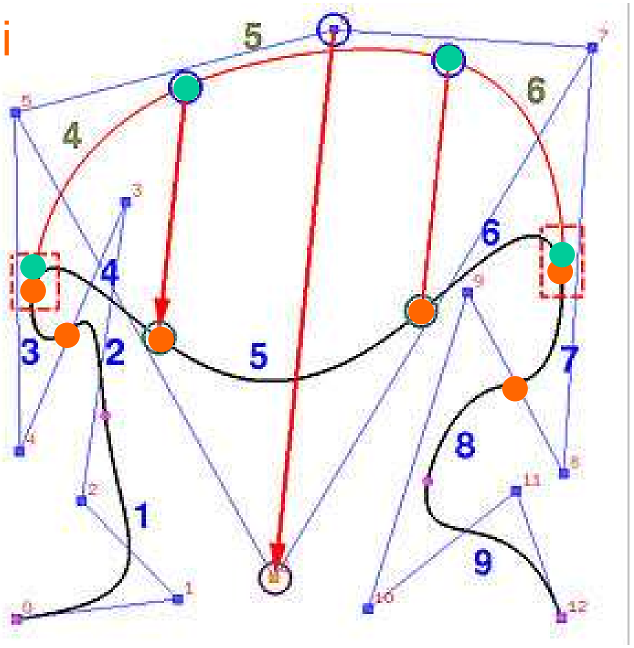


MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
curve B-Spline

Modificando i punti di controllo la funzione cambia solo localmente perché il generico Pi è attivato solo in corrispondenza dei sottointervalli inclusi in $[u_i, u_{i+k+1})$

K=4; n+1=13, m+1=18 → 9 segmenti di curva





Muovendo P6 si modificano solo i segmenti di arco 3, 4, 5, 6 e 7 che vanno da $\boldsymbol{P}(u_6)$ a $\boldsymbol{P}(u_{11})$.

La curva trasla nel verso in cui si muove il punto di controllo

MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
curve NURBS

Purtroppo le BSpline non sono in grado di descrivere in modo esatto delle coniche. Questo viene soddisfatto dalle NURBS.

NURBS è l'acronimo di Non Uniform Rational B-Spline.

Nascono per descrivere attraverso curve razionali anche le coniche.

Il vettore dei nodi si ripete in modo non uniforme ovvero i nodi possono essere non equispaziati e si possono ripetere con molteplicità.

Le basi sono di tipo razionale ed introducono per ogni punto di controllo un peso $\boldsymbol{h_i}$ grazie al quale si possono descrivere geometrie esatte.

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^{n} R_{i,k}(u)\vec{P}_i$$

$$R_{i,k}(u) = \frac{N_{i,k}(u)h_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)h_i} \qquad h_i > 0$$

$h > 1$ iperbole

$h=1$ parabola

$0<h<1$ ellisse

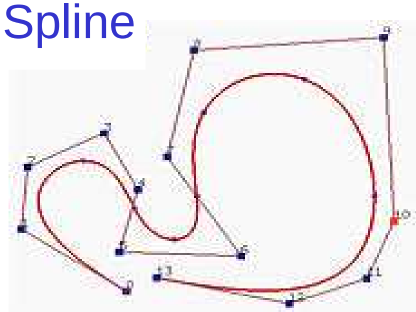
$h = 0$ retta

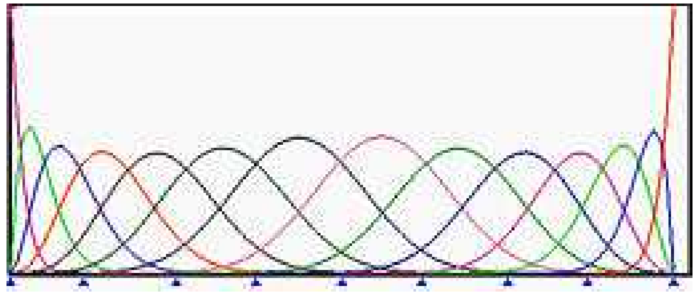
N.B. Se ogni h_i=1 otteniamo una BSpline perché la sommatoria delle $N_{i,k}$ attive fa 1

MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
curve NURBS

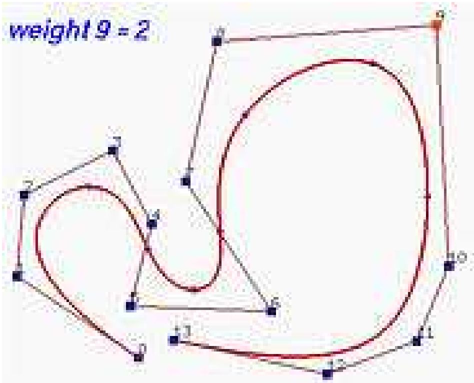
NURBS=BSpline

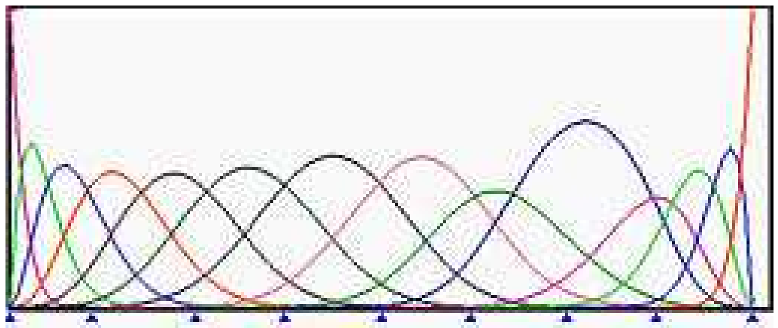
hi=1

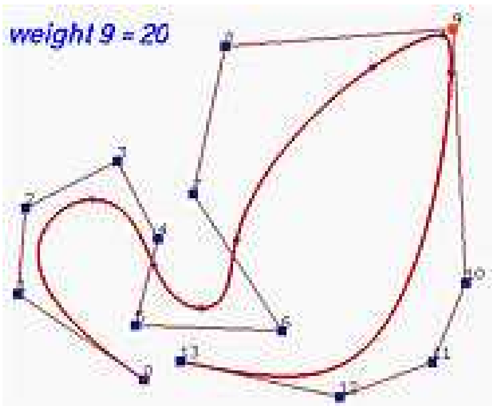


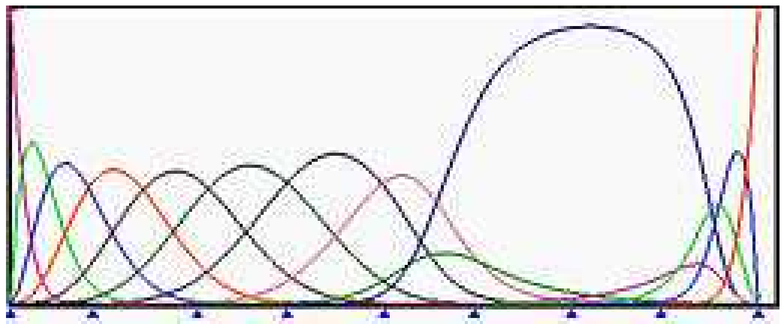


Variamo h_9 facendolo crescere



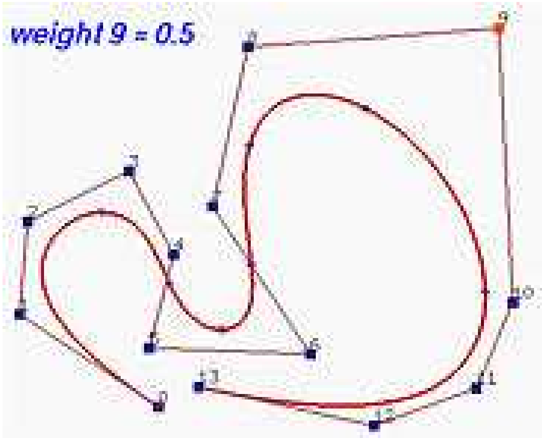


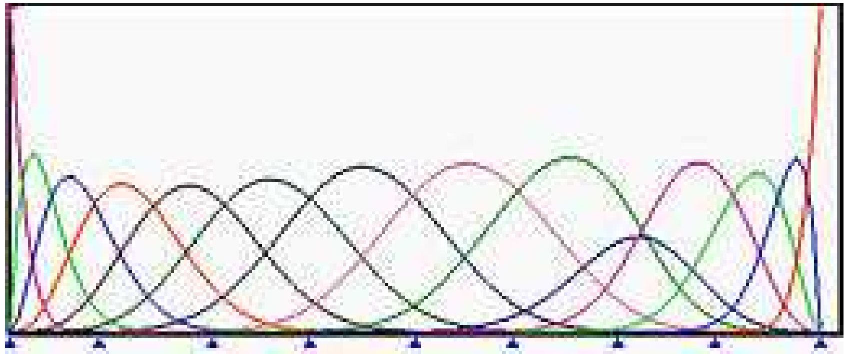


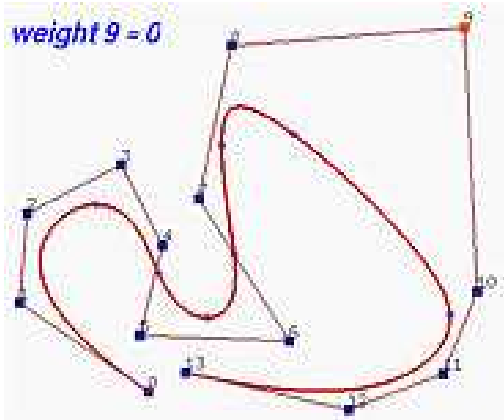


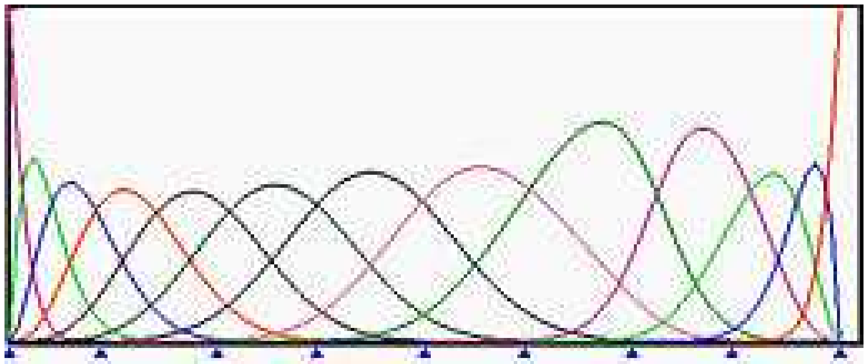
MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI
curve NURBS

Variamo h_9 facendolo decrescere fino a 0







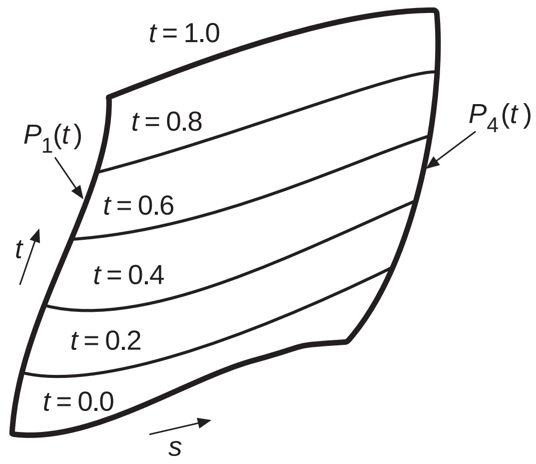


Le variazioni di un peso spostano la curva rispetto al punto di controllo corrispondente, si noti che però cambiano anche le Ri,k più prossime

MODELLAZIONE DELLE SUPERFICI

La modellazione delle superfici presuppone quindi la definizione di un poligono di controllo nello spazio attraverso il quale si possa procedere con le equazioni fin qui esaminate in funzione dei parametri *t* e *s*

Le superfici di Hermite sono superfici parametriche bicubiche in due direzioni (*t* ed *s* riferendosi alla figura) definite attraverso due curve di Hermite di bordo (P1(t) e P4(t) e due curve tangenti.



Adottando equazioni B-spline o Bezier o NURBS si trasportano alle superfici pro e contro esaminati nell'ambito delle curve.

Alcuni riferimenti bibliografici

• Piegl, L.; , "On NURBS: a survey," Computer Graphics and Applications, IEEE ,

vol.11, no.1, pp.55-71, Jan 1991, doi: 10.1109/38.67702

• Les Piegl and Wayne Tiller, The NURBS Book, second edition, Springer-Verlag

• G. Farin: "Curves and surfaces for computer aided geometric design" ed.

Academic Press, 1990

• Kunwoo Lee, Principles of CAD/CAM/CAE Systems Pearson International

Edition